Soluție

1.a) Prin calcul direct rezultă $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A \cdot A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Cum $X^3 = AX = XA,$ rezultă $a = d$ şi $b = 0.$ Înlocuind apoi $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ în ecuația $X^2 = A,$ rezultă $a^2 = 1$ și $ac = 1.$ Obținem soluțiile $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.a) Restul împărțirii polinomului f la $X + 1$ este $f(-1) = b - 5$, care nu depinde de a.

b) Fie $g = f - X$; atunci $X^2 - X \mid g$. Rezultă $g(0) = g(1) = 0$, de unde $a = 0, b = 0$.

c) $(X-1)^2 \mid f \Rightarrow f(1) = f'(1) = 0$. Avem $f(1) = 0 \Rightarrow 2a + b + 1 = 0$ și $f'(1) = 0 \Rightarrow 11a - 15 = 0$; obținem $a = \frac{15}{11}, b = -\frac{41}{11}$.